المعادلات التفاضلية

- ❖ المعادلة التفاضلية: هي كل معادلة من الشكل $f\left(x,y,y',y'',\dots\dots,y^{(n)}\right)=0\ \dots(1)$ ، بعبارة أخرى : هي علاقة بين المتحول المستقل x و التابع y و مشتقات y بالنسبة لـx
- ❖ مرتبة المعادلة التفاضلية : هي بالتعريف أكبر مرتبة اشتقاق تحويها المعادلة التفاضلية
- ❖ درجة المعادلة التفاضلية: هي بالتعريف أكبر أس لأكبر مرتبة اشتقاق تحويها المعادلة التفاضلية
- ❖ حل المعادلة التفاضلية : هي علاقة بين x و y خالية من المشتقات بحيث إذا عوضناها في (1) تحققت
  - ✓ يجب أن يحوي الحل على ثوابت عددها يساوي مرتبة المعادلة التفاضلية و يدعى هذا الحل بالحل العام
  - ✓ يتحول الحل العام إلى حلٍ خاص عندما تتحول الثوابت إلى أعداد (أي عندما نعطي هذه الثوابت قيماً عددية أو عندما يرافق المعادلة شروط ابتدائية)
  - ✓ الحل الشاذ: هو حل للمعادلة التفاضلية (يحققها) لكنه لا ينتج عن الحل العام باعطاء الثابت قيمة ما

سنقوم بهذا الملخص باستعراض أنواع المعادلات التفاضلية بترتيبٍ جيد ٍ بحيث يفضل أنه عندما نشرع لحل معادلة تفاضلية ما و لم نعرف تحديد نوعها فإننا نفكر بها بالترتيب الذي سيذكر بعد قليل

المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى : و هي معادلة تأخذ أحد الشكلين :

$$\phi(x,y)dx+\psi(x,y)dy=0$$
$$y'=f(x,y)$$

و لنبدأ بسرد انواعها مرفقين ذلك بأمثلة محلولة و أمثلة تترك للقارئ كتمرين ☺

@ المعادلة التفاضلية القابلة لفصل المتحولات:

هي المعادلات التي يمكن كتابتها بالشكل : $f(x)dx+g(y)dy=0$ أي هي المعادلات التي يمكن فيها جعل أمثال dx تابعاً لـ x فقط و أمثال dy تابعاً لـ y فقط

أمثلة :

١) $(xy-x)dx+(xy+x-y-1)dy=0$

في الحقيقة إن المعادلة المعطاة قابلة لفصل المتحولات و ذلك بملاحظة أنه يمكن كتابتها بالشكل :

$$x(y-1)dx+\big(x(y+1)-(y+1)\big)dy=0$$
$$\Leftrightarrow x(y-1)dx+(x-1)(y+1)dy=0$$

نقسم الطرفين على $(y-1)(x-1)\neq 0$ فنجد أن:

$$\frac{x}{x-1}dx+\frac{y+1}{y-1}dy=0$$

الآن و بمكاملة الطرفين نحصل على :

$$x+y+ln|x-1|+2ln|y-1|=c$$

و هو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة (لاحظ أنها تحوي ثابتاً واحداً لأن المعادلة المعطاة من المرتبة الأولى و هذا يتوافق مع ما سبق ذكره)

٢) $ln(cosy)dx+x(tgy)dy=0$

بالتقسيم على المقدار: $xln(cosy)$ تصبح المعادلة من الشكل:

$$\frac{dx}{x}+\frac{tgy}{ln(cosy)}dy=0$$

أو:

$$\frac{dx}{x}-\frac{d\big(ln(cosy)\big)}{ln(cosy)}=0$$

بمكاملة الطرفين :

$$ln|x|-ln|ln(cosy)|=c\Leftrightarrow ln\left|\frac{x}{ln(cosy)}\right|=c$$

٣) $\sqrt{\frac{1+cos2x}{1+siny}}+y'=0$

$$\frac{\sqrt{1+cos2x}}{\sqrt{1+siny}}+y'=0$$

$$\frac{\sqrt{2cos^2x}}{\sqrt{sin^2\left(\frac{y}{2}\right)+cos^2\left(\frac{y}{2}\right)+siny}}+y'=0$$

$$\frac{\sqrt{2}cosx}{\sqrt{sin^2\left(\frac{y}{2}\right)+cos^2\left(\frac{y}{2}\right)+2sin\left(\frac{y}{2}\right)cos\left(\frac{y}{2}\right)}}+y'=0$$

$$\frac{\sqrt{2}cosx}{\sqrt{\left(sin\left(\frac{y}{2}\right)+cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)^2}}+y'=0$$

$$\frac{\sqrt{2}cosx}{sin\left(\frac{y}{2}\right)+cos\left(\frac{y}{2}\right)}+\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow\sqrt{2}cosx\,dx+\left(sin\left(\frac{y}{2}\right)+cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)dy=0$$

و هي معادلة تفاضلية منفصلة التغيرات ، بالمكاملة نجد:

$$\sqrt{2}sinx-2cos\left(\frac{y}{2}\right)+2sin\left(\frac{y}{2}\right)=c$$

و هو الحل العامل المطلوب .

المعادلة التفاضلية المتجانسة :

بدايةً : نقول عن التابع $f(x,y)$ إنه متجانس من المرتبة n إذا تحقق الشرط :

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$

" اي إذا بدلنا كل x بـλx وكل y بـλy ثم استطعنا أن نخرج الـλ عامل مشترك دون أن يتغير شكل التابع"

-الآن و قد عرفنا ما معنى أن التابع متجانس أصبح بالإمكان تعريف المعادلة التفاضلية المتجانسة:

♥ ليكن لدينا أحد المعادلتين التفاضلين :

$$y'=f(x,y)$$

$$f_1(x,y)dx+f_2(x,y)dy=0$$

نقول عن المعادلة الأولى إنها متجانسة إذا كان التابع f متجانساً . و نقول عن المعادلة الثانية إنها متجانسة إذا كان كل من f_2 و f_1 متجانسان من نفس الدرجة

♥كيف نحل المعادلة التفاضلية المتجانسة ؟! إذا كنا حيال معادلة تفاضلية علمنا أنها متجانسة فيكفي أن نفرض $z=\frac{y}{x}$ و حساب dy بدلالة dz و من ثم التعويض للحصول على معادلة تفاضلية منفصلة المتغيرات :

أمثلة:

١) $$\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)dx-xdy=0$$

يمكن التحقق بسهولة أن المعادلة المعطاة معادلة متجانسة من المرتبة الأولى و لحلها نفرض $z=\frac{y}{x}$ و بالتالي يكون $y=zx\Rightarrow dy=xdz+zdx$ نعوض :

$$\left(zx+\sqrt{x^2-z^2x^2}\right)dx-x(xdz+zdx)=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(z+\sqrt{1-z^2}\right)dx-x(xdz+zdx)=0$$

بالاختصار على $x\neq 0$ و من ثم التجميع :

$$\left(\sqrt{1-z^2}\right)dx-xdz=0\Leftrightarrow\frac{dx}{x}-\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=0$$

بمكاملة الطرفين نجد أن الحل العام هو: $ln|x|-arcsin(z)=c$

و بالعودة للمتحول الأصلي: $ln|x|-arcsin\left(\frac{y}{x}\right)=c$ و هو المطلوب

٢) $xy'-y=\frac{x}{arctg\left(\frac{y}{x}\right)}$ (يترك للقارئ)

ملاحظة: يفضل في أغلب الأحيان أنه إذا كانت المعادلة معطاة بدلالة 'y فإننا نحسب 'z أما إذا كانت معطاة بدلالة dy فإننا نحسب dz

المعادلة التفاضلية التي ترد إلى متجانسة :

لتكن لدينا المعادلة : $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ نلاحظ أن البسط و المقام معادلتي مستقيمين و نميز هنا:

١-المستقيمين منطبقين : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ و هذا يعني أن البسط ينتج عن المقام بضربه بعدد ثابت λ

اي: $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y+c_1)}\right) = f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = c$ إذن

$$y' = c \Rightarrow y = cx + c_1$$

٢- المستقيمين متوازيين: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

و هذا يعني أن المقدار $a_1x + b_1y = \lambda(a_2x + b_2y)$ و بالتالي إذا فرضنا $z = a_1x + b_1y$ عندها يكون $a_2x + b_2y = \lambda z$ و نحصل على معادلة منفصلة المتغيرات :

٣-المستقيمين متقاطعين: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ عندها نجري التحويل :

$$x = x_0 + X \Longrightarrow dx = dX$$
$$y = y_0 + Y \Longrightarrow dy = dY$$

حيث (x_0, y_0) هي نقطة تقاطع المستقيمين التي نوجدها بالحل المشترك لمعادلتي المستقيمين

إضاءة: لو نظرنا إلى المعادلة $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ و كان المستقيمان متقاطعين ...فنلاحظ أنه ما يمنع أن يكون f تابعاً متجانساً هو وجود الثابتين $c_1 \& c_2$ و هندسياً نعلم أن كل منهما يمثل انسحاب المستقيم عن المبدأ فلو سحبنا جملة المحاور انسحاباً مناسباً لجعل المستقيمين مارين من المبدأ الجديد عندها سيختفي كل من الثابتين و نحصل على تابع متجانس

أمثلة:

١) $y' = \frac{2x-5y+3}{2x+4y-6}$

أولاً لنلاحظ أن $-\frac{5}{4} \neq \frac{2}{2}$ و بالتالي المستقيمين متقاطعين و نقطة تقاطعهما هي الحل المشترك للمعادلتين :

$$\left.\begin{matrix} 2x_0 - 5y_0 + 3 = 0 \\ 2x_0 + 4y_0 - 6 = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow x_0 = y_0 = 1$$

الآن لنجري الانسحاب :

$$x = 1 + X \Longrightarrow dx = dX$$
$$y = 1 + Y \Longrightarrow dy = dY$$

نعوض:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X - 5Y}{2X + 4Y}$$

الآن نحن أمام معادلة متجانسة لأن التابع في الطرف الأيمن تابع متجانس (تحقق من ذلك)

ونعلم أنه من المناسب لحل معادلة تفاضلية متجانسة أن نفرض $z = \frac{Y}{X}$

$$\Rightarrow Y = zX \Rightarrow Y' = z + z'X$$

نعوض :

$$z + z'X = \frac{2X - 5zX}{2X + 4zX} = \frac{2 - 5z}{2 + 4z} \quad : X \neq 0$$

$$\frac{dz}{dX}X = \frac{-4z^2 - 7z + 2}{4z + 2}$$

$$\Rightarrow \frac{dX}{X} = \frac{4z + 2}{-4z^2 - 7z + 2}$$

بمكاملة الطرفين:

$$-ln|x| = \frac{1}{2}ln|4z^2 + 7z - 2| + \frac{1}{3}argth\left(\frac{8z + 7}{9}\right) + c$$

$$ln\left|\frac{1}{x}\right| = ln\sqrt{\left|\frac{4y^2}{x^2} + \frac{7y}{x} - 2\right|} + \frac{1}{3}argth\left(\frac{8y + 7x}{9x}\right) + c$$

٢) $(2x - 3y + 4)dx + (3x - 2y + 1)dy = 0$ (يترك للقارئ)

المعادلات التفاضلية التامة : لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \,..... (1)$$

نقول عن المعادلة التفاضلية (1) إنها معادلة تفاضلية تامة إذا وجد تابع مثل $f(x,y)$ يحقق أنّ:

$$df(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \,... (*)$$

عندها تختزل المعادلة (1) إلى الشكل $df(x,y) = 0$ و بالتالي $f(x,y) = c$

♥كيف نعرف أن المعادلة التفاضلية تامة؟! الشرط اللازم و الكافي لتكون المعادلة التفاضلية (1) تامة هو أن يتحقق أنّ:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

♥كيف نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة؟!

تكمن مهمتنا في إيجاد تابع $f(x,y)$ يحقق $(*)$

لنلاحظ أن :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \dots .(2)$$

بمقارنة (2) مع (1) نجد أن

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y) \dots ..(1')$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y) \dots \dots (2')$$

و هنا لدينا طريقتين للحصول على f :

١- نكامل طرفي $(1')$ بالنسبة لـx و نكامل طرفي $(2')$ بالنسبة لـy ثم نأخذ الحدود المشتركة و غير المشتركة دون تكرار

٢-نكامل أحدهما بالنسبة لمتغيره ($1'$ لـx أو $2'$ لـy) باعتبار المتغير الآخر ثابت و بالتالي يكون ثابت المكاملة تابع لهذا المتغير

فمثلاً لو كاملنا $(1')$ بالنسبة لـ x سيكون الثابت $c=c(y)$ عندها نشتق التابع الناتج بالنسبة لـy و نطابقه مع Q و العكس بالعكس ..... و بالمثال يتضح المقال☺

مثال:

١- $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$

أولاً لنتحقق فيما إذا كانت المعادلة المعطاة تامة:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= 12xy \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 12xy\end{aligned}\right\} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{(المعادلة تامة)}$$

و لنوجد الحل بالطريقتين :

الطريقة ١:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2$$

نكامل الطرفين بالنسبة لـ x :

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + c_1 \dots .(1)$$

من جهة أخرى :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3$$

نكامل الطرفين بالنسبة لـy :

$$f(x,y) = 3x^2y^2 + y^4 + c_2 \dots .(2)$$

نأخذ من (1)و (2) الحدود المشتركة و غير المشتركة دون تكرار فيكون الحل :

$$f(x,y) = x^3 + y^4 + 3x^2y^2 = C$$

الطريقة ٢: نأخذ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2$$

نكامل الطرفين بالنسبة لـ x :

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + c_{(y)} \dots (*)$$

نشتق الطرفين لـy

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y + c'_y$$

لكن

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow 6x^2y + c'_y = 6x^2y + 4y^3 \Rightarrow c'_y = 4y^3 \Rightarrow c_y = y^4$$

بالتعويض في $(*)$يتم المطلوب

المعادلات التفاضلية التي ترد إلى تامة :

في أغلب الأحيان نكون أمام معادلة تفاضلية من الشكل

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ إلا أن الشرط $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ لا يكون محققاً فنلجأ عندها إلى ما يعرف بعامل التكميل الذي هو تابع إذا ضربنا فيه طرفي المعادلة التفاضلية أصبحت تامة.

هنالك الكثير من الحالات و الأشكال المختلفة لعوامل التكميل سنناقش أبرزها :

١-عامل التكميل التابع لـ x فقط:

إذا كان $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$ فهذا يعني أنّ $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \neq 0$ فإذا كان $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ تابعاً لـ x فقط عندئذٍ يكون عامل التكميل المطلوب هو :

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{Q} dx}$$

أمثلة :

١- $\left(2y^2 + \frac{1}{x}\right)dx + 2xydy = 0$

نلاحظ أنّ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} = 4y \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{Q} = \frac{4y - 2y}{2xy} = \frac{1}{x} = G(x)$$

إذاً $\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{Q}$ تابع لـx فقط و بالتالي يكون عامل التكميل هو :

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{Q} dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{lnx} = x$$

نضرب طرفي المعادلة التفاضلية بـعامل التكميل $\mu(x) = x$:

$$(2xy^2 + 1)dx + 2x^2ydy = 0$$

أصبحت تامة (تحقق من ذلك)

الآن نوجد الحل العام كما تعلمنا سابقاً :

بأن نأخذ أولاً P و نكامله لـx

$$\int P(x,y)dx = \int (2xy^2+1)dx = x^2y^2 + x + c_1 \ldots(1)$$

ثم نأخذ Q و نكامله لـy :

$$\int Q(x,y)dy = \int 2x^2y\,dy = x^2y^2 + c_2 \ldots\ldots(2)$$

فيكون الحال العام هو التابع المكون من الحدود المشتركة و غير المشتركة في (1)&(2) دون تكرار أي:

$$f(x,y) \equiv x^2y^2 + x = C$$

٢- $(x-y^2)dx + 2xydy = 0$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= -2y\\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2y\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{Q} = \frac{-4y}{2xy} = \frac{-2}{x}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{Q}dx} = e^{\int \frac{-2}{x}dx} = e^{ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x^2}$$

نضرب المعادلة بعامل التكميل فنجد:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{x^2}\right)dx + 2\frac{y}{x}dy = 0$$

أصبحت تامة (تحقق من ذلك)

ثم نكمل كما مر في المثال السابق

٢- عامل التكميل التابع لـ y فقط:

إذا كان $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P}$ تابعاً لـ y فقط عندئذٍ يكون عامل التكميل المطلوب هو :

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{-P}dy}$$

أمثلة:

١- $(x^2y + y^2)dy + 2xy^2dx = 0$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= 4xy\\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2xy\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = \frac{4xy - 2xy}{-2xy^2} = \frac{1}{y} = G(y)$$

و بالتالي يكون عامل التكميل المطلوب :

$$\mu(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{lny} = y$$

نضرب طرفي المعادلة المعطاة بعامل التكميل $\mu(y) = y$ فتصبح تامة و نكمل تماماً كما في المثال السابق .

٢- $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = \frac{8xy^3e^y + 8xy^2 + 4}{-(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)} = \frac{4(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)}{-y(exy^3e^y + 2xy^2 + 1)}$$

$$= -\frac{4}{y} = G(y)$$

و بالتالي يكون عامل التكميل المطلوب :

$$\mu(y) = e^{\int \frac{-4}{y} dy} = e^{ln\left(\frac{1}{y^4}\right)} = \frac{1}{y^4}$$

نضرب طرفي المعادلة المعطاة بعامل التكميل $\mu(y) = \frac{1}{y^4}$ فتصبح تامة (تحقق من ذلك)

$$\left(2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3}\right)dx + \left(x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4}\right)dy = 0$$

الآن نوجد الحل العام كما تعلمنا سابقاً :

بأن نأخذ أولاً P و نكامله لـ x

$$\int P(x,y)dx = \int \left(2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3}\right)dx = x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + c_1 \ldots(1)$$

ثم نأخذ Q و نكامله لـ y :

$$\int Q(x,y)dy = \int \left(x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4}\right)dy = x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + c_2 \ldots\ldots(2)$$

فيكون الحل العام هو التابع المكون من الحدود المشتركة و غير المشتركة في (1)&(2) دون تكرار أي:

$$f(x,y) \equiv x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = C$$

المعادلة التفاضلية الخطية:

إن المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى تأخذ أحد الشكلين التاليين (ينتج أحدهما من الآخر):

$y' + P(x)y = Q(x)$ أو $\varphi(x)y' + \psi(x)y = f(x)$ وتحل هكذا نوع من المعادلات بأكثر من طريقة سنذكر اثنتان فقط:

طريقة عامل التكميل :

تشترط هذه الطريقة أن يكون أمثال y' يساوي الواحد و إلا نقسم على أمثالها أي نرد المعادلة إلا الشكل $y' + P(x)y = Q(x)$ عندئذ نقبل أن عامل تكميل هذه المعادلة هو التابع المعطة بالعلاقة:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

عندئذٍ يمكن اثبات أن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة يعطى بالشكل:

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x).Q(x)dx\right)$$

طريقة برنولي:

و هنا لا يوجد أي شرط لتطبيق طريقة برنولي مهما كان شكل المعادلة التفاضلية الخطية : و لنفرض أن لدينا المعادلة من الشكل $y' + P(x)y = Q(x)$

نفرض أن الحل العام عبارة عن جداء تابعين مثل u, v أي نفرض :

$$y = u.v \qquad : u = u(x)\ \&\ v = v(x)$$

نشتق بالنسبة لـ x:

$$y' = u.v' + u'v$$

نعوض في المعادلة المعطاة :

$$uv' + u'v + P(x).u.v = Q(x)$$

نعزل أحد التابعين u أو v ثم نجعل أمثاله تساوي إلى الصفر :

$$u'v + \underbrace{(v' + P(x).v)}_{=0}\,u = Q(x) \ldots (*)$$

$$v' + P(x).v = 0 \Rightarrow v' = -P(x)v \Rightarrow \boxed{v = -\int P(x).v.dx} \ldots (1)$$

بعد أن جعلنا أمثال v معدومة تصبح المعادلة (*) من الشكل:

$$u'.v = Q(x) \Rightarrow u' = \frac{Q(x)}{v} \Rightarrow \boxed{u = \int \frac{Q(x)}{v}dx} \ldots (2)$$

من (1)&(2) مع تذكر الفرض أن y=u.v يكون :

$$\boxed{y = \left(\int \frac{Q(x)}{v}dx\right)\left(-\int P(x).v.dx\right)}$$

سنأخذ أمثلة نستعرض فيها الطريقتين ☺

أمثلة:

١- $y'(cos^2x) + y = tanx$

طريقة برنولي :

نفرض أن $u = u(x)\ \&v = v(x)\ :\ y = u.v$ و نشتق طرفيها بالنسبة لـ x فنجد

$$y' = u'v + uv'$$

نعوض في المعادلة المعطاة:

$$u'v\,cos^2x + uv'\,cos^2x + uv = tanx$$

نعزل u (يمكن عزل u أو v وهنا اخترنا u)

$$u'vcos^2x + (v'cos^2x + v).u = tanx \ldots (*)$$

نجعل أمثال u تساوي الصفر أي:

$$v'cos^2x + v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx}cos^2x = -v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{cos^2x}$$

نكامل الطرفين:

$$ln\,|v| = -tanx \Rightarrow \boxed{v = e^{-tanx}}$$

و بعد أن جعلنا أمثال u معدومة تصبح المعادلة (*):

$$u'v\,cos^2x = tanx \Rightarrow u' = \frac{tanx}{v}\frac{1}{cos^2x}$$

نعوض v فنجد:

$$u' = e^{tanx}tanx\frac{1}{cos^2x} \Leftrightarrow du = e^{tanx}tanx\frac{dx}{cos^2x}$$

نكامل الطرفين

$$u = \int te^t dt \quad : t = tanx$$

نكامل بطريقة التجزئة فنجد أنّ:

$$\boxed{u = tanx\,e^{tanx} - tanx + c}$$

نبدل في عبارة $y=uv$ فنجد:

$$\boxed{y = e^{-tanx}(tanx\,e^{tanx} - tanx + c)}$$

طريقة عامل التكميل:

لدينا المعادلة $y'(cos^2x) + y = tanx$ نقسم طرفي المعادلة على $cos^2x \neq 0$ فتصبح:

$$y' + \frac{1}{cos^2x}y = \frac{1}{cos^2x}tanx$$

و هي من الشكل:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

عندئذٍ نعلم أنّ هذه المعادلة تقبل عامل تكميل من الشكل:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{cos^2x}dx} = e^{tanx}$$

نضرب طرفي المعادلة المعطاة بعامل التكميل فنجد :

$$y' e^{tanx} + \frac{1}{cos^2x} e^{tanx} y = tanx\, e^{tanx} \frac{1}{cos^2x}$$

نلاحظ أن الطرف الأول هو مشتق العبارة ye^{tanx} بالنسبة لـ x:

أي:

$$\frac{d(y\, e^{tanx})}{dx} = tanx\, e^{tanx} \frac{1}{cos^2x}$$
$$\Rightarrow d(y\, e^{tanx}) = tanx\, e^{tanx} \frac{dx}{cos^2x}$$

نكامل الطرفين:

$$y\, e^{tanx} = \int tanx\, e^{tanx} \frac{dx}{cos^2x} = \int te^t dt \quad : t = tanx$$

بالتجزئة نجد أن:

$$y\, e^{tanx} = (tanx\, e^{tanx} - tanx + c)$$
$$\Rightarrow \boxed{y = e^{-tanx}(tanx\, e^{tanx} - tanx + c)}$$

نلاحظ أننا حصلنا على نفس الجواب و أيضاً نلاحة أن الجواب الأخير يتوافق مع ما ذكرناه في الشرح النظري بأنه دائماً يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية التي تقبل عامل $\mu(x)$ تكميل لها من الشكل:

$$y = y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x).Q(x)dx\right)$$

٢- $y'(cosx) + y = 1 - sinx$

نقسم طرفي المعادلة على $cosx \neq 0$

$$y' + \frac{1}{cosx} y = \frac{1 - sinx}{cosx}$$

و هي معادلة تفاضلية خطية لأنها من الشكل:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

عندئذ تقبل هذه المعادلة عامل تكميل من الشكل:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{dx}{cosx}} = e^{\int \frac{cosxdx}{cos^2 x}} = e^{\int \frac{dsinx}{1-sin^2 x}} = e^{argth(sinx)}$$

عندئذٍ يكون الحل العام من الشكل :

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)Q(x)dx$$
$$= e^{-argth(sinx)} \int e^{argth(sinx)} . \frac{1 - sinx}{cosx} dx$$

لنحسب التكامل الأخير نلاحظ أولاً أنه:

$$argthx = ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$
$$\Rightarrow argth(sinx) = ln\left(\sqrt{\frac{1+sinx}{1-sinx}}\right)$$
$$\Rightarrow e^{argth(sinx)} = \sqrt{\frac{1+sinx}{1-sinx}} = \frac{\sqrt{1+sinx}}{\sqrt{1-sinx}}$$
$$e^{argth(sinx)} . \frac{1-sinx}{cosx} = \frac{\sqrt{1+sinx}}{\sqrt{1-sinx}} \frac{1-sinx}{cosx}$$
$$= \frac{\sqrt{1+sinx}.\sqrt{1-sinx}}{cosx} = \frac{\sqrt{(1+sinx)(1-sinx)}}{cosx}$$

نلاحظ أن المقدار الموجود تحت الجذر من الشكل $(a+b)(a-b)$ الذي يساوي $a^2 - b^2$ أي:

$$e^{argth(sinx)} . \frac{1-sinx}{cosx} = \frac{\sqrt{1-sin^2 x}}{cosx} = \frac{cosx}{cosx} = 1$$

نكامل الطرفين :

$$\int e^{argth(sinx)} . \frac{1-sinx}{cosx} dx = \int 1dx = x + c$$

نعوض في y فيكون الحل العام:

$$y = e^{-argth(sinx)}(x + c)$$

المعادلة برنولي التفاضلية:

هي معادلة تفاضلية من الشكل : $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ و تحل إما بطريقة برنولي التي ذكرناها في فقرة المعادلة التفاضلية الخطية تماماً أو يمكن ردها إلى خطية كما يلي :

أ- نقسم طرفي المعادلة على y^n فيصبح لدينا :

$$y'y^{-n} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

ب- نجري تغييراً في المتحول $z = y^{1-n}$ و بالتالي يكون $z' = (1-n)y^{-n}y'$

و هذا يكافئ أن: $\frac{1}{1-n}z' = y'y^{-n}$

ت- نعوض في المعادلة المعطاة:

$$\frac{1}{1-n}z' + P(x)z = Q(x)$$
$$\Leftrightarrow z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

و هي من الشكل :

$$z' + P_1(x)z = Q(x) \dots (*)$$

حيث $P_1(x) = (1-n)P(x)$

$Q_1(x) = (1-n)Q(x)$

و بالتالي نلاحظ من المعادلة (*) أننا حصلنا على معادلة تفاضلية خطية في التابع z نحلها كما تعلمنا في الفقرة السابقة باعتبار المجهول هو z ثم نعود للمتحول الأصلي بعد الحل

نذير تيناوي
9/1/2016
f.b : Natheer Tinawy